CÁLCULO II
Funciones de varias variables

Facultad de Informática (UPM)

Función vectorial de n variables

Definición

Una **función** de m componentes y de n variables es una correspondencia que asigna a cada punto $\overline{x}$ de un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ un punto de $\mathbb{R}^m$ que denotamos por $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$. Si $m = 1$ se dice que f es una **función real o un campo escalar**. Si $m > 1$ se dice que la **función es vectorial**.

Una función $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$$

puede descomponerse, de modo natural, en m aplicaciones reales

$$f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

que se llaman **funciones componentes** de $\overline{f}$, y se definen como

$$f_k(\overline{x}) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Ejemplos: Funciones reales o campos escalares

1. Proyecciones canónicas en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^n$:

$$P_1(x,y)=x, P_2(x,y)=y,$$

$$P_1(x,y,z)=x, P_2(x,y,z)=y, P_3(x,y,z)=z,$$

$$P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1,\ldots,P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_n,$$

2. Polinomios en $\mathbb{R}^n$ (combinaciones lineales de productos de las proyecciones canónicas):

$$f(x,y,z)=x^2y^7z^3-5x^3y+1$$

3. Funciones racionales (cocientes de polinomios):

$$R(x,y)=\frac{x^2-y^2}{3x^2+y^3}$$

4. Composiciones con funciones reales:

i) $f(x,y)=\dfrac{e^{x+y}}{1+x^2}$ ii) $f(x,y,z)=\log(1+x^2+y^2+2z^4)$

Ejemplos: Funciones vectoriales

1. Curvas en el plano ($n = 1, m = 2$):

$$\bar{r}(t) = (2\cos t, -3\,\mathrm{sen}\,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2. Curvas en el espacio ($n = 1, m = 3$):

$$\bar{r}(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t, t),\ 0 \leq t \leq 4\pi.$$

3. Curvas en $\mathbb{R}^m$ ($n = 1, m$).

$$\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots r_m(t)).$$

4. Otras funciones vectoriales:
   1. n=2, m=3:
   $$\bar{f}(x, y) = (x + y, 1, x/y)$$
   2. n=4, m=3:
   $$\bar{f}(x, y, z, t) = (x\cos y, x^t, 3xy + 2zt)$$

Función vectorial de n variables

Definición (Dominio)

Sea $\overline{f}$ una función de n variables. El **dominio** de $\overline{f}$ que denotaremos por $D(\overline{f})$ es el conjunto donde la función está definida:

$$D(f) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } f(\overline{x})\}.$$

Ejemplos

1. $f(x,y) = \dfrac{2}{(x-5)(y-7)}$. $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x=5\} \cup \{y=7\})$.
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-2x+2y}$. Completando cuadrados en el denominador, tenemos $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2$, que es una circunferencia de centro $(1,-1)$ y de radio $\sqrt{2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{log(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. El logaritmo está definido si $x^2+y^2 > 1$, la raíz si $x^2+y^2 \leq 4$ y el denominador si $x^2+y^2 \neq 4$.

$$Dom(f) = \{(x,y); 1 < x^2+y^2 < 4\}$$

Función vectorial de n variables

Definición (Gráfica)

Sea $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. La **gráfica** de $\overline{f}$ es

$$Graf(f) = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \ | \overline{x} \in D(f), \overline{y} = f(\overline{x})\}.$$

Ejemplos

1. Un plano $Ax + By + Cz = D$ con $C \neq 0$ es la gráfica de $f(x, y) = \dfrac{1}{C}(D - Ax - By)$.
2. La gráfica de $f(x, y) = Ax^2 + By^2$ con $A\dot{B} > 0$ es un paraboloide con vértice está en el origen. ¿Cuál es la gráfica de $f(x, y) = A(x - a)^2 + B(y - b)^2 + C$?
3. ¿Cuál es la gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}?$$

Función vectorial de n variables

Ejemplos

1. La gráfica de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es la rama superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$. ¿Cuál es la gráfica de $f(x,y) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + C$.?
2. La gráfica de $f(x,y) = c + \sqrt{r^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ es la semi-esfera superior de centro (a,b,c) y de radio r.
3. La función definida a trozos:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   es un escalón de altura 1 sobre la recta $x = 0$.
4. ¿Qué condición tiene que cumplir un conjunto de $\mathbb{R}^3$ para que sea la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Función real de 2 variables

Definición (Curva de nivel)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. La **curva de nivel** de f de altura c es el conjunto:

$$S_c = \{(x, y); f(x, y) = c\}.$$

Ejemplos

1. Las curvas de nivel de $f(x, y) = Ax + By + C$, son rectas

$$S_c = \{(x, y); \quad Ax + By = c - C\}$$

2. ¿Cómo son las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$?
3. Las curvas de nivel para la función $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 2y$ son circunferencias. ¿Con qué centro y qué radio?
4. Las curvas de nivel para la función $f(x, y) = xy$ son las hipérbolas si $c \neq 0$. Para $c = 0$ la curva de nivel S_0 está formada por los dos ejes.

Función real de 3 variables

Definición (Superficie de nivel)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. La **superficie de nivel** de f de altura c es:

$$S_c = \{(x, y, z); f(x, y, z) = c\}.$$

Ejemplos

1. La superficie de nivel cero de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ es una esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2. ¿A partir de qué valor de c hay superficie de nivel?
2. La superficie de nivel cero de $f(x, y, z) = 16 - 4x^2 - y^2 - z^2$ es un elipsoide. ¿Cuáles son sus ejes y su centro?
3. La superficie de nivel cero de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ es cilindro.
4. La superficie de nivel cero de $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ es un paraboloide Hiperbólico (silla de montar).

Límites de funciones vectoriales

Definición

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, y $\overline{a} \in A'$ ($\overline{a}$ punto de acumulación del dominio) diremos que el **límite** de $\overline{f}$ en $\overline{a}$ es $\overline{L}$

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L},$$

si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta(\epsilon) \ \text{ tal que } \|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{L}\| < \epsilon, \text{ si } \overline{x} \in A \ \text{ con } \ \|\overline{x} - \overline{a}\| < \delta.$$

Observación. $\|\overline{x}\|$ es la norma en $\mathbb{R}^n$ y $\|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{L}\|$ en $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio. Probar que si $f(x, y) = x$, se cumple que

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = a.$$

Propiedades

Proposición

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{a} \in A'$, *tales que existen los límites* $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = L_1$ *y* $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = L_2$, *entonces:*

1. $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} [f(\overline{x}) + g(\overline{x})] = \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) + \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x})$.
2. $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} [f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})] = \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) \cdot \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x})$.
3. *Si* $L_2 \neq 0$, *se cumple* $$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})}{\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x})}.$$

Ejemplos. Calcular los siguientes límites

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$

iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}$ iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x\cos\frac{1}{xy}$

Límites límite según subconjuntos

Definición

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{a} \in A'$, y sea $B \subset A$ con $\overline{a} \in B' \cap A'$. Llamaremos límite de $\overline{f}$ relativo a B (o según B) en $\overline{a}$, al valor $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}|_B$ cuando exista.

Observación.

1. Si existe
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L},$$
entonces existe el límite según cualquier subconjunto.
2. Si existen dos subconjuntos distintos $A, B \subset D$, $(a, b) \in A' \cap B'$ de forma que
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}|_A(\overline{x}) \neq \lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}|_B(\overline{x}),$$
entonces **no existe** el límite
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}(\overline{x})$$

Límites de funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

1. **Límites reiterados.** Nos acercamos al punto (a, b) primero en una variable y luego en la otra:

$$\lim_{y \to b}\left(\lim_{x \to a} f(x,y)\right) \;\; ; \;\; \lim_{x \to a}\left(\lim_{y \to b} f(x,y)\right),$$

no deben confundirse los los límites dobles, en los que nos acercamos al punto (a, b) simultaneamente en x y en y.

2. **Límites por rectas.** Es un caso particular de límite según un subconjunto, cuando B es una recta de la forma $y = m(x - a) + n$. Se hace el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x, m(x - a) + n)$.
Si este límite da valores distintos para distintos m, el límite no existe. Si no depende de m, el límite doble puede existir o no.

3. **Polares.** Se hace el cambio $x = a + \rho \cos\theta$; $y = b + \rho \operatorname{sen}\theta$ y se calcula

$$\lim_{\rho \to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho \operatorname{sen}\theta),$$

si este límite existe y no depende de θ, el límite doble tiene ese valor.

Ejemplos Límites de funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Dados los límites dobles

$$\text{i)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} \qquad \text{ii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad \text{iv)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

1. Calcula los límites iterados correspondientes e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.
2. Calcula los límites por rectas correspondientes e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.
3. Calcula los límites por polares e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.

Propiedades de límites de funciones vectoriales

Proposición (Límites por componentes)

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\overline{a} \in A'$, $\overline{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$, *entonces se cumple*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f_k(\overline{x}) = L_k, \ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Observación. El límite de una función vectorial $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se calcula mediante los m límites de sus funciones componentes, que son funciones reales de n-variables.

Ejemplo. Calcula

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \overline{f}(x, y),$$

siendo
$$\overline{f}(x, y) = (e^{x+y}, \operatorname{sen}(x - y), x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}).$$

Propiedades de límites de funciones vectoriales

Proposición

Sean $\overline{f}, \overline{g} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{a} \in A'$, *tales que existen* $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L}_1$ *y* $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{g}(\overline{x}) = \overline{L}_2$, *entonces:*

1. $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} [\overline{f}(\overline{x}) + \overline{g}(\overline{x})] = \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) + \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{g}(\overline{x})$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \lambda \overline{f}(\overline{x}) = \lambda \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x})$.
3. $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} < \overline{f}(\overline{x}), \overline{g}(\overline{x}) > = < \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}), \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{g}(\overline{x}) >$, *(siendo* $< \cdot, \cdot >$ *el producto escalar).*

Ejemplo. Calcula

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} < \overline{f}(x, y), \overline{g}(x, y) >$$

siendo
$$\overline{f}(x, y) = (e^{x+y}, \operatorname{sen}(x - y), x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \text{ y}$$
$$\overline{g}(x, y) = (\cos(xy), \ln(1 + x + y), \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Continuidad

Vamos a considerar funciones $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Definición

Diremos que $\overline{f}$ es **continua** en $\overline{a}$, si y solo si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \text{ tal que } \|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{a})\| < \epsilon, \text{ si } \overline{x} \in A \text{ con } \|\overline{x} - \overline{a}\| < \delta.$$

Se dice que $\overline{f}$ es continua en A si es continua en cada punto de A y se denota por $\mathcal{C}(A)$.

Proposición

1. *Si $\overline{a} \in A \cap A'$, entonces se cumple*

$$\overline{f} \ \textit{ es continua en } \overline{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{a}).$$

2. *Si $\overline{a} \in A \setminus A'$ (punto aislado), entonces $\overline{f}$ es continua en $\overline{a}$.*

Ejemplo. *La función $f(x, y) = x$ es continua en todo punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Propiedades de funciones continuas

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $\bar{a} \in A$*, entonces:*

1. $f + g$ *es continua en* $\bar{a}$.
2. $f \cdot g$ *es continua en* $\bar{a}$.
3. *Si* $g(\bar{a}) \neq 0$*, entonces* f/g *es continua en* $\bar{a}$.

Ejemplos. Estudia la continuidad de las siguientes funciones

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{si} \quad x = -y. \end{cases}$$

   ¿Se puede definir esta función en los puntos $(x,-x)$ de forma que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$?

Proposición (composición)

Sean $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *continua en* $\overline{a}$, *y* $\overline{g} : \overline{f}(A) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, *continua en* $\overline{f}(\overline{a})$; *entonces:*

$$\overline{g} \circ \overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{es continua en } \overline{a}.$$

Ejemplos. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$ ii) $f(x,y) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{xy} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$

Corolario

Sean $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *tal que* $\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L} \in \overline{f}(A)$, *y* $\overline{g} : \overline{f}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *continua en* $\overline{L}$; *entonces*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{g}(\overline{f}(\overline{x})) = \overline{g}\left(\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x})\right) = \overline{g}(L).$$

Ejemplo. Sean $g(t) = e^t$ y $f(x,y) = x \cos \frac{1}{y}$. Aunque f no es continua en $(0,0)$, se tiene que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(f(x,y)) = 1.$

Proposición (funciones vectoriales)

Sea $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *y* $\overline{a} \in A$,

$\overline{f}(\overline{x})$ *es continua en* $\overline{a} \iff f_k(\overline{x})$ *es continua en* $\overline{a}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Ejemplo. Continuidad de la función

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \operatorname{sen}(x-y), x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Proposición (Propiedades)

Sean $\overline{f}, \overline{g} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\overline{f}$ *y* $\overline{g}$ *continuas en* $\overline{a}$, *entonces:*

1. $(\overline{f} + \overline{g})(\overline{x})$ *es continua en* $\overline{a}$.
2. $(\lambda \overline{f})(\overline{x})$ *es continua en* $\overline{a}$.
3. $< \overline{f}(\overline{x}), \overline{g}(\overline{x}) >$ *es continua en* $\overline{a}$.
4. *La función norma* $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por* $\|\overline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, *es una aplicación continua en* $\overline{x}$.

Derivadas parciales

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\overline{a} \in A$, con A abierto. Llamaremos **derivada parcial i-ésima** de la función f en $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, al siguiente límite cuando exista

$$\lim_{x \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots, a_n)}{x - a_i},$$

a este límite se le llama $D_i f(\overline{a})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$, $f'_{x_i}(\overline{a})$. La versión incremental será

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + k, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots, a_n)}{k}.$$

Definición

Sea $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto, $\overline{f}$ continua en A. Diremos que $\overline{f}$ es de **clase 1** en A ($\overline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$) si todas las derivadas parciales de todas las componentes f_i de $\overline{f}$ existen y son continuas en A.

Matriz Jacobiana

Definición (Matriz Jacobiana)

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto de $\mathbb{R}^n$. Si existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \text{ y } j = 1, 2, \ldots n,$$

llamaremos **matriz Jacobiana** de $\overline{f}$ en $\overline{a}$, a la matriz

$$\overline{f}'(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overline{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Funciones reales

Observación. Si es una función real, $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la matriz Jacobiana de f en $\bar{a}$ tiene una sólo fila y podemos considerar que es un vector que llamamos **Vector Gradiente**

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right).$$

Derivadas parciales de funciones de dos y tres variables.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x,b,c) - f(a,b,c)}{x - a}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y,c) - f(a,b,c)}{y - b} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{z \to c} \frac{f(a,b,z) - f(a,b,c)}{z - c}$$

Diferencial

Definición

Sea $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con A abierto. Se llama **diferencial** de $\overline{f}$ en $\overline{a}$ a la aplicación lineal $d\overline{f}(\overline{a}; \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definida por la matriz Jacobiana, cuando se cumple que

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{\|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{f}'(\overline{a})(\overline{x} - \overline{a})\|_m}{\|\overline{x} - \overline{a}\|_n} = 0.$$

Teorema (diferenciabilidad $\Rightarrow$ continuidad)

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \in A$, entonces $\overline{f}$ es continua en $\overline{a}$.

Teorema (diferenciabilidad por componentes)

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\overline{a} \in A$, entonces se cumple

$$\overline{f} \text{ diferenciable en } \overline{a} \iff f_i \text{ es diferenciable en } \overline{a} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $\bar{a} \in A$, entonces:

1. $f + g$ *es diferenciable en* $\bar{a}$.
2. $f \cdot g$ *es diferenciable en* $\bar{a}$.
3. *Si* $g(\bar{a}) \neq 0$, *entonces* f/g *es diferenciable en* $\bar{a}$.

Ejemplos. Estudia la diferenciabilidad de la función

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{si} \quad x = -y. \end{cases}$$

Teorema (condiciones suficientes de diferenciabilidad)

Sea $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto de $\mathbb{R}^n$, y tal que existen $\dfrac{\partial f_i(\overline{x})}{\partial x_j}$, $\forall \overline{x} \in A$, con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, y además son funciones continuas en $\overline{a} \in A$; entonces $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$.

Ejemplo. Dif. de $\overline{f}(x,y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \sin(x-y), x \operatorname{sen} \frac{1}{x}) & \text{si } x) \neq 0 \\ (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x+y} \, ; \, \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x+y} \text{ son continuas } \Rightarrow f_1 \text{ diferenciable en } \mathbb{R}^2 .$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \cos(x-y); \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\cos(x-y) \text{ son continuas } \Rightarrow f_2 \text{ diferenciable en } \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \, ; \, \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0 \text{ son continuas si } x \neq 0 \Rightarrow f_3 \text{ dif si } x \neq 0.$$

En los puntos $(0,b)$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,b) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \nexists \Rightarrow \text{ no dif en } (0,b).$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\overline{g} : \overline{f}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^p$, tales que $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \in A$ y $\overline{g}$ diferenciable en $\overline{f}(\overline{a})$, entonces $\overline{g} \circ \overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$ y se cumple

$$d(\overline{g} \circ \overline{f})(\overline{a}) = d\overline{g}(\overline{f}(\overline{a})) \circ d\overline{f}(\overline{a}).$$

Es decir, la matriz Jacobiana de la composición $(\overline{g} \circ \overline{f})'(\overline{a})$, será

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{f}(\overline{a})) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\overline{f}(\overline{a})) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\overline{f}(\overline{a})) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(\overline{f}(\overline{a})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(\overline{f}(\overline{a})) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m}(\overline{f}(\overline{a})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena para funciones de una variable

1. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(x, y)$, siendo $x = x(t), y = y(t)$. Entonces se tiene
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$
2. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(x, y, z)$, siendo $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Entonces se tiene
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$
3. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siendo $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$. Entonces se tiene
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}.$$

Regla de la cadena para funciones varias variables variable

1. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(s,t) = f(x,y)$, siendo $x = x(s,t), y = y(s,t)$. Entonces se tiene
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$
2. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(u,v,w) = f(x,y,z)$, siendo $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$. Entonces se tiene
$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$
$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Derivación implícita

1. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overline{a} \in A$ y $\Gamma = \{(x,y)|f(x,y) = 0\}$. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}) \neq 0$, se tiene que f define a y como función implícita de x, es decir $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ tal que $a \in I$, $y = \varphi(x)$ y $f(x, \varphi(x)) = 0 \, \forall x \in I$. Dicha función es derivable en a y se cumple

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) = \varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, \varphi(a))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, \varphi(a))}.$$

2. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, y $S = \{(x,y,z)|f(x,y,z) = 0\}$. Si $\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{a}) \neq 0$, se tiene que f define a z como función implícita de (x,y), es decir $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ tal que $a \in I$, $z = \varphi(x,y)$ y $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \, \forall x \in I$. Dicha función es derivable en (a,b) y se cumple

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,\varphi(a,b))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))} \ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,\varphi(a,b))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}.$$

Aproximación lineal

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $(a, b) \in A$. Por la definición de diferencial, tenemos

$$f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right).$$

Es decir, para puntos (x, y) muy cercanos a (a, b), se tiene

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

donde la parte de la derecha es lineal. De forma incremental, llamando $x = a + h_1, y = b + h_2$ y $\triangle z = f(a + h_1, b + y + h_2) - f(a, b)$, se tiene

$$\triangle z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2.$$

Además, para valores pequeños el error (la aproximación) es menor que $\|(h_1, h_2)\|$ ya que dado $1 \geq \varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$|\triangle z - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2| \leq \|(h_1,h_2)\| \text{ si } \|(h_1,h_2)\| < \delta.$$

Definición

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\overline{a} \in A$, llamaremos derivada de f según el vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ en el punto $\overline{a} \in A$, al siguiente límite, cuando exista,

$$D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\,\overline{v}) - f(\overline{a})}{t}$$

Cuando $\overline{v}$ es un vector unitario, es decir $\|\overline{v}\| = 1$, a la derivada según $\overline{v}$ se la denomina **derivada direccional**.

Observación. En $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional es la pendiente de la tangente en el punto $\overline{a}$ a la curva que resulta de intersecar la superficie con el plano normal al plano OXY que pasa por $\overline{a}$ y que contiene $\overline{v}$.

Teorema (Valor Medio)

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que f es diferenciable en A. Sean $\overline{a}\overline{b} \in A$, tales que el segmento $\mathcal{S}$ que los une $\overline{a}$ con $\overline{b}$ está contenido en A, entonces existe un punto $\overline{c} \in \mathcal{S}$ tal que

$$f(\overline{b}) - f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{c})(\overline{b} - \overline{a}).$$

Proposición (Propiedades del vector gradiente)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A abierto. Si f es diferenciable en $\overline{a} \in A$, entonces

1. *Existe la derivada direccional de f en $\overline{a}$ según el vector $\overline{v}$ para cada $\overline{v}$ de $\mathbb{R}^n$. Además*

$$D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = df(\overline{a}; \overline{v}) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{v}$$

2. *La derivada direccional máxima se alcanza en la dirección del gradiente, y vale la norma del gradiente:*

$$D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{v} = \|\nabla f(\overline{a})\| \cdot ||\overline{v}|| \cos(\nabla f(\overline{a}), \overline{v}) \leq \|\nabla f(\overline{a})\|$$

3. *La derivada direccional es nula si $\overline{v} \perp \nabla f(\overline{a})$:*
   - *Si $n = 2$ ($n = 3$), $\nabla f(\overline{a})$ es ortogonal a la curva (superficie) de nivel.*

4. *Si $n = 2$, el vector*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a}), -1 \right),$$

es ortogonal al plano tangente.

Superficies. Plano tangente

1. Gráfica de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(a, b) \in A$. El **plano tangente** a $\{(x, y, z) | z = f(x, y)\}$ en $(a, b, f(a, b))$ es
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = z - f(a, b)$$
2. Forma implícita. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $(a, b, c) \in A$, el **plano tangente** a $\{(x, y, z) | f(x, y, z) = 0\}$ en (a, b, c) es
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 0$$
3. Paramétricas. $\gamma : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ diferenciable en $(s_0, t_0) \in A$, el **plano tangente** a $\{(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) | (s, t) \in A\}$ en $\gamma(s_0, t_0) = (a, b, c)$ es
$$(x, y, z) = \gamma(s_0, t_0) + s(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0))+$$
$$+t(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0))$$

Curvas en el plano. Recta tangente

1. Gráfica de $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. La **recta tangente** a $\{(x, y) | y = f(x)\}$ en $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

el **vector normal** es: $(f'(a), -1)$.

2. Forma implícita. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $(a, b) \in A$. La **recta tangente** a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|g(x, y) = 0\}$ en (a, b) es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

el **vector normal** es: $\nabla g(a, b)$.

3. Paramétricas. $\gamma : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ diferenciable en $(t_0) \in A$. La **recta tangente** a $\{(x(t), y(t)) | t \in I\}$ es

$$(x, y) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) = (a, b) + t(x'(t_0), y'(t_0)).$$

Curvas en el espacio. Recta tangente

1. Implícitas: intersección de dos superficies.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \{(x,y,z) | f(x,y,z) = 0\} \\ S_2 = \{(x,y,z) | g(x,y,z) = 0\} \end{array} \right.$$

La **recta tangente** es la intersección de los dos planos tangentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0 \end{array} \right.$$

2. Paramétricas. $\gamma : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ diferenciable en $(t_0) \in A$. La **recta tangente** a $\{(x(t), y(t), z(t)) | t \in I\}$ es

$$(x,y) = \gamma(t_0) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$